


1. 酉矩阵:

$$AA^H = A^H A = E$$

2. 正规矩阵

设 $A \in C^{n \times n}$, 且 $A^H A = A A^H$,

则称 A 为正规矩阵

A^H : A 的共轭转置

3. 正交矩阵

$$A^T A = E \quad (A^T = A^{-1})$$

泰勒展开. $n=0$ 开始

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4. Hermite 矩阵:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$A^H = A$$

5. 矩阵的迹 = 矩阵特征值之和

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

$$\text{rank } A = \dim R(A)$$

$$\text{rank } A + n(A) = A \text{ 列数}$$

$$n(A) = \dim N(A)$$

$$\dim R(A) + \dim N(A) = A \text{ 列数}$$

定义 1.7 设 $A \in R^{m \times n}$, 称集合 $\{x \mid Ax = 0\}$ 为 A 的核空间(零空间), 记为 $N(A)$, 即

$$N(A) = \{x \mid Ax = 0\} \quad (1.1.14)$$

显见 $N(A)$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间, 它是 R^n 的一个子空间. A 的核空间的维数称为 A 的零度, 记为 $n(A)$, 即 $n(A) = \dim N(A)$.

QR分解

一. Schmidt 正交化法

1. 把矩阵 A 写成列向量的形式

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

2. 用施密特正交化方法把 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交化

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \\ \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 \end{cases}$$

k_{21} k_{31} k_{32}

3. 把 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化

$$r_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|}, r_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|}, r_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|}$$

$$Q = [r_1, r_2, r_3]$$

4.

$$R = \begin{bmatrix} |\beta_1| & k_{21}|\beta_1| & k_{31}|\beta_1| \\ & |\beta_2| & k_{32}|\beta_2| \\ & & |\beta_3| \end{bmatrix}$$

二. Householder 法

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & -1 & 3 \\ -1 & -6 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 取 $b_1 = (1 \ 1 \ -1 \ -1)^T$, $\alpha_1 = \|b_1\|_2 = 2$

$$u_1 = \frac{b_1 - \alpha_1 e_1}{\|b_1 - \alpha_1 e_1\|_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = I_4 - 2u_1 u_1^T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} - 2 \times \frac{1}{4} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

得到 $H_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 继续下一步

2. 取 $b_2 = (0 \ 0 \ 4)^T$, $\alpha_2 = \|b_2\|_2 = 4$

$$u_2 = \frac{b_2 - \alpha_2 e_3}{\|b_2 - \alpha_2 e_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_2' = I_3 - 2u_2 u_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & H_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到 $H_2(H_1 A) = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = R$

$$A = QR = (H_1 H_2) R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = H_1 H_2$$

Householder矩阵和Householder变换

定义4.5 设单位列向量 $u \in \mathbb{R}^n$, 称

$$H = I - 2uu^T$$

为Householder矩阵(初等反射矩阵), 由Householder矩阵确定的线性变换称为Householder变换.

性质: (1) $H^T = H$; $H^T H = I$

(2) $H^2 = I$ (对合矩阵); $H^{-1} = H$

(3) $\det H = -1$

三. Givens 法

$$A = QR = T_{12}^H \cdots T_{1n}^H T_{23}^H \cdots T_{2n}^H \cdots T_{n-1,n}^H R$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

消

$$T_{pq} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \bar{c} & \bar{s} \\ & & -\bar{s} & \bar{c} \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} p \text{ 行} \\ \\ q \text{ 行} \end{matrix}$$

p 列 q 列

1. 取 $C_1 = \frac{0}{\sqrt{0^2+2^2}} = 0$ $S_1 = \frac{2}{\sqrt{0^2+2^2}} = 1$

则:

$$T_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad T_{14}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

⊗ 先用 1 填充
主对角线!

(看 $T_{14}A$)

2. 取 $C_2 = \frac{4}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{4}{5}$ $S_2 = \frac{-3}{5}$

则:

$$T_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad T_{24}(T_{14}A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = R$$

$$A = QR = T_{14}^T T_{24}^T R$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

利用盖尔圆定理实现对特征值的隔离

盖尔圆 $G_i: |z - a_{ii}| \leq R_i$

当 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的若干盖尔圆相交时

盖尔圆半径 $R_i: \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$

要隔离它的特征值:

选取正数 $d_1, d_2, \dots, d_n$, 并设对角矩阵

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

构造与 A 相似的矩阵 B :

$$B = DAD^{-1} = (a_{ij} \frac{d_i}{d_j})_{n \times n}$$

则 A 与 B 有相同特征值。适当选取 $d_1, d_2, \dots, d_n$

有可能使 B 的每个盖尔圆包含 A 的一个特征值

★

【相关知识】选取正数 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 的一般原则

(1) 欲使 A 的第 i 个盖尔圆 缩小, 可取 $d_i < 1$, 其余取为 1, 此时 B 的其余盖尔圆适量放大 (相对 A 的同序号的盖尔圆而言);

(2) 反之, 欲使 A 的第 i 个盖尔圆 放大, 可取 $d_i > 1$, 其余取为 1, 此时 B 的其余盖尔圆适量缩小 (相对 A 的同序号的盖尔圆而言)。

【T5-1】用Gerschgorin定理隔离矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 0.3 \\ 1 & -i & 0 \\ 2 & 2 & 2i-1 \end{pmatrix}$ 的特征值（要求画图表示）。

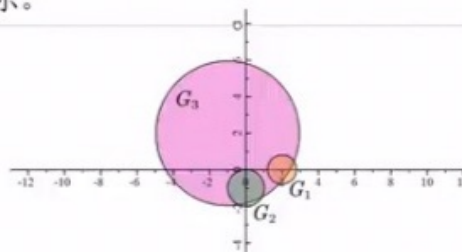
解：矩阵 A 的3个盖尔圆为

$$G_1: |z-2| \leq 0.8,$$

$$G_2: |z+i| \leq 1,$$

$$G_3: |z-(2i-1)| \leq 4$$

易见， G_1, G_3 相交， G_2, G_3 相交如下图所示。



缩小 G_3 , 选取 $D = \text{diag}(1, 1, \frac{1}{2})$

$$\text{则 } B = DAD^{-1} = (a_{ij} \frac{d_i}{d_j})_{n \times n} = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 0.6 \\ 1 & -i & 0 \\ 1 & 1 & 2i-1 \end{pmatrix}$$

$$G'_1: |z-2| \leq 1.1$$

$$G'_2: |z+i| \leq 1$$

$$G'_3: |z-(2i-1)| \leq 2$$

画图， G'_1, G'_2, G'_3 相互孤立

因此， A 的三个特征值分别在 G_1, G_2, G_3 中

选取改变前后
相比半径更小的那个

矩阵函数值的计算 — 求矩阵函数 e^{At} 、求微分方程组的解

一. 微分方程组的解

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}c + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} f(\tau) d\tau$$

二. 待定系数法求矩阵函数值:

1. 求 A 的特征多项式

2. 设 $r(\lambda) = b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0$

根据 $r^{(i)}(\lambda_i) = t^i f^{(i)}(\lambda) |_{\lambda=\lambda_i}$

列方程组 解 $b_0 \dots b_{n-1}$

3. $f(A) = r(A) = b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_1A + b_0I$

确定次方数:

要求最小多项式

(求导) $r(\lambda)$ 的最高次
比最小多项式低

1. 计算一般步骤:

① 设 n 阶矩阵 A 的最小多项式为 m 次多项式

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

② 设 $f(A, t)$

$$f(A, t) = a_0(t)E + a_1(t)A + \dots + a_{m-1}(t)A^{m-1}$$

③ 求系数

系数 $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{m-1}(t)$ 满足:

$$f(\lambda, t) = a_0(t) + a_1(t)\lambda + \dots + a_{m-1}(t)\lambda^{m-1}$$

对 λ 求导 $f'(\lambda, t) = a_1(t) + 2a_2(t)\lambda + \dots + (m-1)a_{m-1}(t)\lambda^{m-2}$

可求出系数 (代入特征值列方程)

④ 将系数代入

$$f(A, t) = a_0(t)E + a_1(t)A + \dots + a_{m-1}(t)A^{m-1}$$

Moore - Penrose 逆 A^+

一. 矩阵的满秩分解

$$A = FG$$

列满秩 $\times$ 行满秩

步骤:

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ($r > 0$), 取 A 的第 $j_1, j_2, \dots, j_r$ 列构成 F

又取 A 的 Hermite 标准形 H 的前 r 行构成 G

(行最简, 阶梯)

二. 求加号逆

(利用满秩分解)

$$A^+ = G^+ F^+ = G^H (GG^H)^{-1} (F^H F)^{-1} F^H$$

• 若 A 是行满秩

$$A^+ = A^H (AA^H)^{-1}$$

• 若 A 是列满秩

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$$

共轭转置:

$$A^H = (\bar{A})^T$$

(转置同时, 矩阵中的复数也转置)

如下四个 Penrose 方程

$$AXA = A \quad (\text{i})$$

$$XAX = X \quad (\text{ii})$$

$$(AX)^H = AX \quad (\text{iii})$$

$$(XA)^H = XA \quad (\text{iv})$$

三. 用广义逆矩阵判断线性方程组 $Ax = b$ 是否有解 (相容)

1. $Ax = b$ 有解的充要条件是 $AA^+b = b$

2. $x = A^+b + (I - A^+A)y$ 是相容方程组 $Ax = b$ 的通解,

或是矛盾方程组 $Ax = b$ 的全部最小二乘解

3. $x_0 = A^+b$ 是相容方程组 $Ax = b$ 的唯一-极小范数解

或是矛盾方程组 $Ax = b$ 的唯一-极小范数最小二乘解

定理6.3 设 $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$, 又设 $Q \in \mathbb{C}_m^{m \times m}$ 和 $P \in \mathbb{C}_n^{n \times n}$

使得 $QAP = \begin{pmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则对任意 $L \in \mathbb{C}^{(n-r) \times (m-r)}$, $n \times m$ 阶矩阵

$$X = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} Q$$

是 A 的 $\{1\}$ -逆. 当 $L = 0$, X 是 A 的 $\{1,2\}$ -逆.

例6.2 P210. 更多例子见6.3节

求逆:

构造 $QAP = \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ A: m x n

① $[A: E] \rightarrow [A \text{ 的 Hermite 转置: } Q]$
(类似)

② $\begin{bmatrix} QA \\ E \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \text{A的H} \\ P \end{bmatrix}$ 左上角化为 I_r

③ $X = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} Q.$ L: (n-r) x (m-r)

矩阵范数

一. 向量范数

1. 向量范数定义:

若对任意的 $x \in C^n$ 都有一个实数 $\|x\|$ 与之对应, 且:

1) 非负性: $x \neq 0$ 时 $\|x\| > 0$, $x = 0$ 时 $\|x\| = 0$

2) 齐次性: 对任意 $k \in C$, $\|kx\| = |k| \cdot \|x\|$

3) 三角不等式: 对任意 $x, y \in C^n$ 都有

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

则称 $\|x\|$ 为 C^n 上的向量范数

2. 常用向量范数

1) 向量的 1 范数 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

2) 向量的 2 范数 $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{x^H x}$

3) 向量的 ∞ 范数 $\|x\|_\infty = \max |x_i|$

4) 向量的 p 范数 $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

5) 加权范数或椭圆范数 $\|x\|_A = \sqrt{x^H A x}$ A 是 n 阶
Hermite 正定阵

二. 矩阵范数

1. 矩阵范数定义

若对任意的 $A \in C^{n \times n}$ 都有一个实数 $\|A\|$ 与之对应, 且:

1) 非负性: $A \neq 0$ 时 $\|A\| > 0$, $A = 0$ 时 $\|A\| = 0$

2) 齐次性: 对任意 $k \in C$, $\|kA\| = |k| \cdot \|A\|$

3) 三角不等式: 对任意 $A, B \in C^{n \times n}$ 都有

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

4) 相容性: 对任意 $A, B \in C^{n \times n}$ 都有

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

则称 $\|A\|$ 为 $C^{n \times n}$ 上的矩阵范数

$\text{tr}(A^H A)$: $A^H A$ 的迹
(对角线元素之和)

2. 常用矩阵范数

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

1) 矩阵的 F 范数: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^H A)}$

2) 矩阵的 1 范数: $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ (列最大)

3) 矩阵的 ∞ 范数: $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ (行最大)

4) 矩阵的 2 范数: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$, λ_1 为 $A^H A$ 的最大特征值

【相关知识】 常见的元素形式的矩阵范数

设 $A = (a_{ij})_{m \times n} \in C^{m \times n}$, 规定

(1) m_1 范数: $\|A\|_{m_1} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

(2) m_2 范数 (F 范数): $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^H A)}$

(3) m_∞ 范数: $\|A\|_M = \max\{m, n\} \max_{i,j} |a_{ij}|$

(4) G 范数: $\|A\|_G = \sqrt{mn} \max_{i,j} |a_{ij}|$

3. 正规矩阵

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

酉矩阵:

$$AA^H = A^H A = E$$

$$A^H A = A A^H \quad \text{称 } A \text{ 为正规矩阵}$$

4. 矩阵的谱半径

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值,

$$\rho(A) = \max_j |\lambda_j| \quad \text{为 } A \text{ 的谱半径}$$

当 A 是正规矩阵

$$\rho(A) = \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \lambda_1 \text{ 为 } A^H A \text{ 的最大特征值}$$

5. 矩阵的奇异值

设 $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ ($r > 0$), $A^H A$ 的特征值为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

则称 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为 A 的奇异值

三. 从属范数或导出范数

C^n 上的向量范数 $\|\cdot\|_v$, 对 $\forall A \in C^{n \times n}$

$$\text{规定 } \|A\| = \max \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

则 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n \times n}$ 上与向量范数相容的矩阵范数

四. 矩阵范数与向量范数的相容性

设 $\|\cdot\|_m$ 是 $C^{n \times n}$ 上的矩阵范数, 若对 $\forall A \in C^{n \times n}$ 和 $x \in C^n$

$$\text{有: } \|Ax\|_v \leq \|A\|_m \|x\|_v$$

则称 $\|\cdot\|_m$ 与 $\|\cdot\|_v$ 相容

补充: 柯西不等式的二维形式

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2 \Leftrightarrow ac + bd \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

线性变换的矩阵表示

一. 线性变换在某个基下的矩阵为对角阵的条件:

设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, T 是 V 的线性变换, 则存在 V 的一个基使得 T 在该基下的矩阵为对角矩阵的条件是:

- (1) (充要条件) T 在数域 K 上有 n 个线性无关的特征向量;
- (2) (充分条件) T 在数域 K 上有 n 个互异的特征值;
- (3) (充要条件) T 在数域 K 上有 n 个特征值, 且每个重特征值对应的线性无关特征向量的个数恰等于该特征值的重数。

二. 线性变换矩阵化简步骤

- (1) 先求出线性变换 T 在某个简单基 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 下的矩阵 A

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$$

- (2) 对矩阵 A 进行相似对角化, 求出相似变换矩阵 P 和对角阵 Λ

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

- (3) 另一个基可通过 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P$ 求出, 即由 T 对应各特征值的线性无关特征向量组成; 在该基下的矩阵为对角阵 Λ 。

三. 不变子空间

【相关知识】不变子空间

设 T 是数域 K 上线性空间 V 的一个线性变换, W 是 V 的一个子空间。如果 W 中的元素在 T 下的像仍在 W 中, 即对任意 $\alpha \in W$, 都有 $T(\alpha) \in W$, 则称 W 是 T 的不变子空间。

【T8-1】设多项式空间 $P_3[t]$ 中的线性变换为

$T[f(t)] = (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2)t + (a_0 + a_2 + a_3)t^2 + a_3t^3$, $\forall f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in P_3[t]$
定义 $P_3[t]$ 上的子空间 $V = \text{span}(1+t, t^2, t^3)$ 。

1. 证明: V 是 T 的不变子空间;

2. 将 T 看成是 V 上的线性变换, 求 V 的一个基, 使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵。

解: (1) 由题可知

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2)t + (a_0 + a_2 + a_3)t^2 + a_3t^3$$

在基 $1+t, t^2, t^3$ 下, 因为

$$T(1+t) = 1+t+t^2 \in V, \quad T(t^2) = 1+t+t^2 \in V, \quad T(t^3) = t^2+t^3 \in V$$

所以 V 是 T 的不变子空间。

$$a_0=1 \quad a_1=1 \quad a_2=0 \quad a_3=0$$

2. T 在 V 的基 $1+t, t^2, t^3$ 下的矩阵为

先求简单
基下的
矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(1+t) = 1 \cdot (1+t) + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$

$$T(t^2) = 1 \cdot (1+t) + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$

$$T(t^3) = 0 \cdot (1+t) + 1 \cdot t^2 + 1 \cdot t^3$$

$$|\lambda E - A| = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 2$$

① $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程组 $(0E - A)x = 0$

$$0E - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore p_1 = (1, -1, 0)^T$$

$$\text{同理 } p_2 = (1, 0, -1)^T$$

$$p_3 = (1, 1, 0)^T$$

最后用基变换
公式求基

$$(p_1 \cdots p_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) P$$

$$\therefore (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

$$= (1+t, t^2, t^3) P$$

$$\begin{cases} f_1(t) = 1+t-t^2 \\ f_2(t) = 1+t-t^3 \\ f_3(t) = 1+t+t^2 \end{cases}$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵的Jordan标准形

1. 特征向量法

(1) 如果 λ_i 是 A 的单特征值，则对应一阶Jordan块 $J_i = (\lambda_i)$ ；

(2) 如果 λ_i 是 A 的 $r_i > 1$ 重特征值，则对应 λ_i 有几个线性无关的特征向量，就有几个以 λ_i 为对角元素的Jordan块，这些Jordan块的阶数之和等于 r_i 。

由 A 的所有特征值对应的Jordan块构成的Jordan矩阵即为 A 的Jordan标准形。

2. 行列式因子法

【相关知识点】 利用行列式因子法确定Jordan标准形

(1) 先求出 $\lambda I - A$ 的 n 个行列式因子 $D_k(\lambda)$ ($k = 1, 2, \dots, n$)；

(2) 再求出 A 的不变因子 $d_k(\lambda)$ ($k = 1, 2, \dots, n$)；

(3) 最后求出 A 的初等因子和Jordan标准形。

行列式因子从最高阶子式开始求

例如4阶矩阵，先求 $D_4(\lambda) =$ 矩阵的行列式

$$D_3(\lambda) \mid D_4(\lambda)$$

$$\text{只要 } D_n(\lambda) = 1$$

$$D_2(\lambda) \mid D_3(\lambda)$$

$$\text{则 } D_{n-1}(\lambda) = 1$$

$$D_{n-2}(\lambda) = 1$$

$\vdots$

$$D_1(\lambda) = 1$$

不变因子

$$d_1 = D_1, d_2 = \frac{D_2}{D_1}, \dots, d_n = \frac{D_n}{D_{n-1}}$$

4. 初等因子：

把每个次数大于零的不变因子分解为互不相同的一次因式的方幂的乘积，所有这些一次因式的方幂（相同的必须按出现次数计算）称为 A 的初等因子

矩阵幂级数的敛散性及求和

1. 矩阵幂级数

设 $A \in C^{n \times n}$, $a_k \in C$

则 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 为 A 的幂级数

$$\rho = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

$$r = \frac{1}{\rho}$$

2. 判定收敛

设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 的收敛半径为 r , $A \in C^{n \times n}$, 则

(1) 当 $\rho(A) < r$, 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 绝对收敛

(2) 当 $\rho(A) > r$, 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$$

谱半径

3. Neumann 级数收敛充要条件

设 $A \in C^{n \times n}$, 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ (Neumann 级数)

收敛 $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$

并且收敛时, 其和为 $(I - A)^{-1}$

4. 若 $\rho(A) = r$, 用定义判断敛散:

【补充知识点】莱布尼兹定理

如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足条件:

(1) $u_n \geq u_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

那么级数收敛。

瑞利熵

1. Rayleigh 商

设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为 Hermite, 称

$$R(x) = \frac{x^H A x}{x^H x}$$

为 A 的 Rayleigh 商

2. 【相关知识点】Hermite 矩阵的特征值与它的 Rayleigh 商的极值之间的关系
设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为 Hermite 矩阵, 它的特征值从大到小排列, 则有

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} R(x), \quad \lambda_n = \min_{x \neq 0} R(x)$$

第八章 矩阵的直积

考点一 直积

1. 直积定义:

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{p \times q}$, 称如下的分块矩阵:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

为 A 与 B 的直积

2. 矩阵直积性质

$$\textcircled{1} k(A \otimes B) = (kA) \otimes B = A \otimes (kB)$$

$$\textcircled{2} (A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B$$

$$B \otimes (A_1 + A_2) = B \otimes A_1 + B \otimes A_2$$

$$\textcircled{3} (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

$$\textcircled{4} (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

$$\textcircled{5} (A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

$$\textcircled{6} (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

$\textcircled{7}$ 设 $A \in C^{m \times m}$ 的全体特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $B \in C^{n \times n}$ 的全体特征值 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, 则 $A \otimes B$ 的全体特征值 $\lambda_i \mu_j$ ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$)

$\textcircled{8}$ 设 A, B 是酉矩阵, 则 $A \otimes B$ 也是酉矩阵

$\textcircled{9}$ 设 x 是 A 的特征向量, y 是 B 的特征向量, 则 $x \otimes y$ 是 $A \otimes B$ 的特征向量

$$\textcircled{10} \text{ 设 } A \in C^{m \times m}, B \in C^{n \times n}$$

$$\text{则 } |A \otimes B| = |A|^n \cdot |B|^m$$

考点二 拉直

1. 拉直的定义:

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 称 mn 维列向量

$$\vec{A} = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn})^T$$

为 A 的拉直

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \vec{A} = (1 \ -1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 5)^T$

2. 性质

$$\textcircled{1} \overrightarrow{kA + kB} = k\vec{A} + k\vec{B}$$

$$\textcircled{2} \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\textcircled{3} \text{ 设 } A = (a_{ij})_{m \times n} \quad B = (b_{ij})_{n \times p}$$

则 $\vec{AB} = (E_m \otimes B^T) \vec{A}$ 按 $\vec{A}$ 展开

$$\vec{AB} = (A \otimes E_n) \vec{B} \text{ 按 } \vec{B} \text{ 展开}$$

$$A: \lambda_i$$

$$B: \mu_j$$

$$AX + XB = F \text{ 有唯一解}$$



$$\lambda_i + \mu_j \neq 0$$

3. 定理

$$\text{设 } A \in C^{m \times n}, B \in C^{p \times q}, X \in C^{n \times p}$$

$$\text{则 } \vec{AXB} = (A \otimes B^T) \vec{X}$$

$$\vec{AX + XB} = (A \otimes E_n) \vec{X} + (E_n \otimes B^T) \vec{X}$$